

ТЕОРИЈА БРОЈЕВА И ПОЛИНОМА

Задаци за домаћи (II део) - 2018/2019 година

1. Да ли постоји цео број x такав да су бројеви

$$\frac{3x-2}{13}, \frac{18x-35}{17} \text{ и } \frac{5x-2}{19}$$

истовремено цели?

2. Решити систем конгруенцијских једначина:
- $$\begin{aligned} 35x &\equiv_6 10 \\ 28x &\equiv_5 14 \\ 5x &\equiv_{14} 30 \end{aligned}$$

3. Нека је n непаран природан број. Одредити остатак броја $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ при дељењу са 60.

4. Доказати да за сваки прост број $p > 3$ једначина $x^2 - x + 2 \equiv_p 0$ има решење ако и само ако једначина $x^2 - x + 16 \equiv_p 0$ има решење.

5. Да ли постоји цео број x такав да $67 \mid 5x^2 - 4x + 146$?

6. Одредити све природне бројеве n за које важи $33 \mid n^2 + 8$.

7. Доказати да је за сваки прост број $p > 3$, полином $(x+1)^p - x^p - 1$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

8. Полином $P(x)$ при дељењу са $x^2 - 16$ даје остатак $x + 9$, а при дељењу са $x + 2$ даје остатак -3 . Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $(x^2 - 16)(x + 2)$.

9. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{2018} - x^{2017} + x^{2016}$ са полиномом $Q(x) = x^3 + 1$.

10. Доказати да полином $P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ нема вишеструких корена.

11. Одредити a , b и c тако да је полином $P(x) = ax^{2n} - bx^{2n-1} + cx$ дељив са $(x-1)^2(x+1)$. Какав је полином $P(x)$?

12. Нека су α , β , γ и δ нуле полинома $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. Ако су $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ и $\frac{1}{\delta}$ нуле полинома $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, одредити a , b , c и d .

13. Наћи све нуле полинома $P(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$ ако је познато да он има реалну нулу вишеструкости 2.

14. Одредити природне бројеве n за које полином $(x^2 + x + 1)^2$ дели полином $x^n + (x + 1)^n + 1$.

15. Ако је полином $f(x) = xp(x^3) - q(x^3)$ дељив полиномом $x^2 - x + 1$, онда су полиноми $p(x)$ и $q(x)$ дељиви са $x + 1$. Доказати.
16. Доказати да је полином $P(x) = (n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$ дељив полиномом $Q(x) = (x-1)^3$ за свако $n, m \in \mathbb{N}$.
17. Наћи све нуле полинома $P(x) = x^6 + ax^5 + 36x^4 - 68x^3 + 73x^2 - 42x + 10$ ако је познато да је његова нула $1-i$ и да има једну троструку нулу. Колико рационалних нула има полином $Q(x)$ где је $Q(x) = 2P(x) - 11$?
18. Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да једна нула полинома $P(x) = x^3 - 26x + a$ буде три пута већа од друге нуле тог полинома.
19. Одредити све вредности реалног параметра a тако да све нуле полинома $P(x) = x^4 + ax^2 + ax - 1$ имају међусобно једнаке модуле.
20. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 17 \\x^3 + y^3 + z^3 &= 27.\end{aligned}$$